

# Foward the theory of Sobolev's mappings on the plane

Руслан Р. Салимов

11.06.2010

## Аннотация.

The paper is devoted to the study of homeomorphisms with finite distortion on the plane with use of the modulus techniques.

В статье изучаются гомеоморфизмы с конечным искажением на плоскости с использованием модульной техники.

## 1 Введение

Непрерывное отображение  $\gamma$  открытого подмножества  $\Delta$  действительной оси  $\mathbb{R}$  или окружности в  $D$  называется **штриховой линией**, см., например, раздел 6.3 в [207]. Напомним, что любое открытое множество  $\Delta$  в  $\mathbb{R}$  состоит из счетного набора попарно непересекающихся интервалов. Это дает мотивировку для термина "штриховая линия".

Пусть задано семейство  $\Gamma$  штриховых линий  $\gamma$  в комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ . Борелевскую функцию  $\varrho : \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty]$  называют **допустимой** для  $\Gamma$ , пишут  $\varrho \in \text{adm } \Gamma$ , если

$$\int_{\gamma} \varrho ds \geq 1 \quad \forall \gamma \in \Gamma. \quad (1.1)$$

Пусть  $p \geq 1$ . Тогда  $p$ -модулем семейства  $\Gamma$  называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\varrho \in \text{adm } \Gamma} \int_{\mathbb{C}} \varrho^p(z) dm(z) \quad (1.2)$$

где  $dm(z)$  соответствует мере Лебега в  $\mathbb{C}$ . Говорят, что свойство  $P$  имеет место для  $p$ -**п.в.** (почти всех)  $\gamma \in \Gamma$ , если подсемейство всех линий в  $\Gamma$ , для которых  $P$  не верно имеет нулевой  $p$ -модуль, ср. [42]. Также говорят, что измеримая по Лебегу функция  $\varrho : \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty]$

является **обобщенно допустимой** для  $\Gamma$ , пишут  $\varrho \in \text{ext}_p \text{adm } \Gamma$ , если (1.1) имеет место для  $p$ -п.в.  $\gamma \in \Gamma$ , см., например, раздел 9.2 в [207].

## 2 О емкостях

Следуя работе [204], пару  $\mathcal{E} = (A, C)$ , где  $A \subset \mathbb{C}$  – открытое множество и  $C$  – непустое компактное множество, содержащееся в  $A$ , называем *конденсатором*. Конденсатор  $\mathcal{E}$  называется *кольцевым конденсатором*, если  $B = A \setminus C$  – кольцо, т.е., если  $B$  – область, дополнение которой  $\overline{\mathbb{C}} \setminus B$  состоит в точности из двух компонент. Конденсатор  $\mathcal{E}$  называется *ограниченным конденсатором*, если множество  $A$  является ограниченным. Говорят также, что конденсатор  $\mathcal{E} = (A, C)$  лежит в области  $D$ , если  $A \subset D$ . Очевидно, что если  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  – непрерывное, открытое отображение и  $\mathcal{E} = (A, C)$  – конденсатор в  $D$ , то  $(fA, fC)$  также конденсатор в  $fD$ . Далее  $f\mathcal{E} = (fA, fC)$ .

Пусть  $\mathcal{E} = (A, C)$  – конденсатор. Обозначим  $C_0(A)$  через множество непрерывных функций  $u : A \rightarrow \mathbb{R}^1$  с компактным носителем.  $W_0(\mathcal{E}) = W_0(A, C)$  – семейство неотрицательных функций  $u : A \rightarrow \mathbb{R}^1$  таких, что 1)  $u \in C_0(A)$ , 2)  $u(x) \geq 1$  для  $x \in C$  и 3)  $u$  принадлежит классу ACL и пусть

$$|\nabla u| = \left( \sum_{i=1}^2 (\partial_i u)^2 \right)^{1/2}. \quad (2.1)$$

При  $p \geq 1$  величину

$$\text{cap}_p \mathcal{E} = \text{cap}_p(A, C) = \inf_{u \in W_0(\mathcal{E})} \int_A |\nabla u|^p dm(z) \quad (2.2)$$

называют  *$p$ -ёмкостью* конденсатора  $\mathcal{E}$ . В дальнейшем мы будем использовать равенство

$$\text{cap}_p \mathcal{E} = M_p(\Delta(\partial A, \partial C; A \setminus C)), \quad (2.3)$$

где для множеств  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  и  $\mathcal{S}_3$  в  $\mathbb{C}$ ,  $\Delta(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2; \mathcal{S}_3)$  обозначает семейство всех непрерывных кривых, соединяющих  $\mathcal{S}_1$  и  $\mathcal{S}_2$  в  $\mathcal{S}_3$ , см. [194], [201] и [216]. Емкости в контексте теории отображений хорошо отражены в монографии [198].

Известно, что при  $p \geq 1$

$$\text{cap}_p \mathcal{E} \geq \frac{(\inf m_{n-1} \sigma)^p}{[m(A \setminus C)]^{p-1}}, \quad (2.4)$$

где  $l(\sigma)$  – длина кривой, где  $\sigma$ -гладкая (бесконечно дифференцируемая) кривая, которая является границей  $\sigma = \partial U$  ограниченного открытого множества  $U$ , содержащего  $C$  и содержащегося вместе со своим замыканием  $\overline{U}$  в  $A$ , а точная нижняя грань берется по всем таким  $\sigma$ , см. предложение 5 из [205].

Известно, что при  $1 \leq p < 2$

$$\text{cap}_p \mathcal{E} \geq 2\pi^{\frac{p}{2}} \left( \frac{2-p}{p-1} \right)^{p-1} [m(C)]^{\frac{2-p}{2}} \quad (2.5)$$

см., напр., п. 1.4. в [208].

При  $1 < p \leq 2$  имеет место оценка

$$(\text{cap}_p \mathcal{E}) \geq \gamma \frac{d(C)^p}{m(A)^{p-1}}, \quad (2.6)$$

где  $d(C)$  - диаметр компакта  $C$ ,  $m(A)$  - мера Лебега множества  $A$ ,  $\gamma$  - положительная константа, зависящая только от  $p$ , см. предложение в [205].

### 3 О нижних $Q$ -гомеоморфизмах относительно $p$ -модуля

Следующее понятие мотивировано кольцевым определением квазиконформности по Герингу, см., например, [193]. Для заданных областей  $D$  и  $D'$  в  $\mathbb{C}$ ,  $z_0 \in D$ , и измеримой функции  $Q : D \rightarrow (0, \infty)$ , говорят, что гомеоморфизм  $f : D \rightarrow D'$  является **нижним  $Q$ -гомеоморфизмом относительно  $p$ -модуля в точке  $z_0$** , если

$$M_p(f\Sigma(z_0, r_1, r_2)) \geq \inf_{\varrho \in \text{ext}_p \text{adm } \Sigma(z_0, r_1, r_2)} \int_{R(z_0, r_1, r_2)} \frac{\varrho^p(z)}{Q(z)} dm(z) \quad (3.1)$$

для каждого кольца

$$R(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}, \quad 0 < r_1 < r_2 < d_0,$$

где  $d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$  и  $\Sigma(z_0, r_1, r_2)$  обозначает семейство, всех окружностей  $C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ ,  $r \in (r_1, r_2)$ .

Прежде чем доказывать основную лемму о нижних  $Q$ -гомеоморфизмах относительно  $p$ -модуля, приведем вспомогательную лемму из работы [207]. ■

**Лемма 3.1.** Пусть  $(X, \mu)$  — измеримое пространство с конечной мерой  $\mu$ ,  $q \in (1, \infty)$ , и пусть  $\varphi : X \rightarrow (0, \infty)$  — измеримая функция. Положим

$$I(\varphi, q) = \inf_{\alpha} \int_X \varphi \alpha^q d\mu, \quad (3.2)$$

где инфимум берется по всем измеримым функциям  $\alpha : X \rightarrow [0, \infty]$  таким, что

$$\int_X \alpha d\mu = 1. \quad (3.3)$$

Тогда

$$I(\varphi, q) = \left[ \int_X \varphi^{-\lambda} d\mu \right]^{-\frac{1}{\lambda}}, \quad (3.4)$$

где

$$\lambda = \frac{q'}{q}, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1, \quad (3.5)$$

т.е.  $\lambda = 1/(q-1) \in (0, \infty)$ . Кроме того, инфимум в (3.2) достигается только для функции

$$\alpha_0 = \gamma \cdot \varphi^{-\lambda}, \quad (3.6)$$

где

$$\gamma = \left( \int_X \varphi^{-\lambda} d\mu \right)^{-1}. \quad (3.7)$$

Ниже приведен критерий того, что гомеоморфизм в  $\mathbb{C}$  является нижним  $Q$ -гомеоморфизмом относительно  $p$ -модуля.

**Лемма 3.2.** Пусть  $D$  — область в  $\mathbb{C}$ ,  $z_0 \in D$ , и пусть  $Q : D \rightarrow (0, \infty)$  — измеримая функция. Гомеоморфизм  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  является нижним  $Q$ -гомеоморфизмом в точке  $z_0$  относительно  $p$ -модуля при  $p > 1$  тогда и только тогда, когда

$$M_p(f\Sigma(z_0, r_1, r_2)) \geq \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\left( \int_{C(z_0, r)} Q^{\frac{1}{p-1}}(z) |dz| \right)^{p-1}}, \quad (3.8)$$

для всех  $0 < r_1 < r_2 < d_0$ , где  $d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$  и  $\Sigma(z_0, r_1, r_2)$  — семейство всех окружностей  $C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ ,  $r \in (r_1, r_2)$ . Инфимум в (3.1) достигается только для функции

$$\varrho_0(z) = \frac{Q(z)}{\left( \int_{C(z_0, |z-z_0|)} Q^{\frac{1}{p-1}}(z) |dz| \right)^{p-1}}. \quad (3.9)$$

**Доказательство.** Для любой функции  $\rho(z) \in \text{ext}_p \text{adm } \Sigma(z_0, r_1, r_2)$  следующая величина

$$A_\varrho(r) := \int_{C(z_0, r)} \varrho(z) d\mathcal{A} \neq 0 \quad \text{п.в.}$$

и является измеримой по параметру  $r$ , например, по теореме Фубини. Таким образом, мы можем требовать равенство  $A_\varrho(r) \equiv 1$  п.в. вместо условия допустимости (1.1), и

$$\inf_{\varrho \in \text{ext}_p \text{adm } \Sigma(z_0, r_1, r_2)} \int_{R(z_0, r_1, r_2)} \frac{\varrho^p(z)}{Q(z)} dm(z) = \int_{r_1}^{r_2} \left( \inf_{\alpha \in I(r)} \int_{C(z_0, r)} \frac{\alpha^p(z)}{Q(z)} |dz| \right) dr,$$

где  $I(r)$  – множество всех измеримых функций  $\alpha$  на окружности  $C(z_0, r)$  таких, что

$$\int_{C(z_0, r)} \alpha(z) |dz| = 1.$$

Итак, Лемма 3.2 следует из Леммы 7.1 при  $X = C(z_0, r)$ ,  $\mu$  – 1–мерная длина на  $C(z_0, r)$ ,  $\varphi = \frac{1}{Q}|_{C(z_0, r)}$ . Теорема доказана.

Таким образом, неравенство (3.8) является точным для нижних  $Q$ –гомеоморфизмов относительно  $p$ –модуля.

Неравенство (3.8) можно переписать в несколько ином виде, который иногда будет более удобен для дальнейшего исследования.

**Теорема.** Пусть  $Q : D \rightarrow (0, \infty)$  – измеримая функция и  $f : D \rightarrow D'$  – нижний  $Q$ –гомеоморфизм в точке  $z_0 \in D$  относительно  $p$ –модуля при  $p > 1$ , тогда для любых  $0 < r_1 < r_2 < d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$

$$M_{\frac{p}{p-1}}(f(\Delta(C_1, C_2, D))) \leq \left( \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(r)} \right)^{-\frac{1}{p-1}}$$

$$\text{где } \|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(r) = \left( \int_{C(z_0, r)} Q^{\frac{1}{p-1}}(z) |dz| \right)^{p-1}$$

*Доказательство.* Действительно, пусть  $0 < r_1 < r_2 < d(z_0, \partial D)$  и  $C_i = C(z_0, r_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Согласно неравенствам Хессе и Цимера, см., напр., [75] и [189], см. также приложения А3 и А6 в [207],

$$M_{\frac{p}{p-1}}(f(\Delta(C_1, C_2, D))) \leq \frac{1}{M_p^{\frac{1}{p-1}}(f(\Sigma(z_0, r_1, r_2)))}, \quad (3.10)$$

поскольку  $f(\Sigma(z_0, r_1, r_2)) \subset \Sigma(f(C_1), f(C_2), f(D))$ , где  $\Sigma(z_0, r_1, r_2)$  обозначает совокупность всех окружностей с центром в точке  $z_0$ , расположенных между окружностями  $C_1$  и  $C_2$ , а  $\Sigma(f(C_1), f(C_2), f(D))$  состоит из всех кривых в  $f(D)$ , отделяющих  $f(C_1)$  и  $f(C_2)$ . Из соотношения (3.10) по предложению ?? получаем, что

$$M_{\frac{p}{p-1}}(f(\Delta(C_1, C_2, D))) \leq \left( \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\left( \int_{C(z_0, r)} Q^{\frac{1}{p-1}}(z) |dz| \right)^{p-1}} \right)^{-\frac{1}{p-1}}. \quad (3.11)$$

□

**Лемма.** Пусть  $Q : D \rightarrow (0, \infty)$  — измеримая функция,  $Q \in L_{loc}^{\frac{1}{p-1}}(D)$  и  $f : D \rightarrow D'$  — нижний  $Q$ -гомеоморфизм в точке  $z_0 \in D$  относительно  $p$ -модуля при  $p > 1$ . Полагаем

$$\eta_0(t) = 1/I \cdot \|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, t),$$

где  $\|Q\|_{n-1}(z_0, r)$ ,  $r \in (r_1, r_2)$  и  $I = I(z_0, r_1, r_2)$  определены в (8) и (10), соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} I^{-\frac{1}{p-1}} &= \int_{R(z_0, r_1, r_2)} Q^{\frac{1}{p-1}}(z) \cdot \eta_0^{\frac{p}{p-1}}(|z - z_0|) dm(z) \leq \\ &\leq \int_{R(z_0, r_1, r_2)} Q^{\frac{1}{p-1}}(z) \cdot \eta^{\frac{p}{p-1}}(|z - z_0|) dm(z) \end{aligned} \quad (3.12)$$

для любой измеримой функции  $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ , такой, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr = 1. \quad (3.13)$$

*Доказательство.* Если  $I = \infty$ , то левая часть соотношения (11) равна нулю и неравенство в этом случае очевидно. Если  $I = 0$ , то  $\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, r) = \infty$  для п.в.  $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$  и обе части неравенства (11) равны бесконечности по теореме Фубини и замечанию 1. Пусть теперь  $0 < I < \infty$ . Тогда  $\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, r) \neq 0$  и  $\eta_0(r) \neq \infty$  п.в. в  $(\varepsilon, \varepsilon_0)$ . Полагая

$$\alpha(r) = \eta(r) \cdot \|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, r)$$

и

$$\omega(r) = [\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, r)]^{-1},$$

по стандартным соглашениям будем иметь, что  $\eta(r) = \alpha(r)\omega(r)$  п.в. в  $(\varepsilon, \varepsilon_0)$  и что

$$C := \int_A Q^{\frac{1}{p-1}}(x) \cdot \eta^{\frac{p}{p-1}}(|z - z_0|) \, dm(z) = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \alpha^{\frac{p}{p-1}}(r)\omega(r) \, dr.$$

Применяя неравенство Иенсена с весом, см. теорему 2.6.2 в [14], к выпуклой функции  $\varphi(t) = t^{\frac{p}{p-1}}$ , заданной в интервале  $\Omega = (\varepsilon, \varepsilon_0)$ , с вероятностной мерой

$$\nu(E) = \frac{1}{I} \int_E \omega(r) \, dr,$$

получаем что

$$\left( \int \alpha^{\frac{p}{p-1}}(r)\omega(r) dr \right)^{\frac{p-1}{p}} \geq \int \alpha(r)\omega(r) \, dr = \frac{1}{I},$$

где мы также использовали тот факт, что  $\eta(r) = \alpha(r)\omega(r)$  удовлетворяет соотношению (3.15). Таким образом,

$$C \geq \frac{1}{I^{n-1}},$$

что и доказывает (12).  $\square$

**Теорема.** Пусть  $Q : D \rightarrow (0, \infty)$  — измеримая функция и  $f : D \rightarrow D'$  — нижний  $Q$ -гомеоморфизм в точке  $z_0 \in D$  относительно  $p$ -модуля при  $p > 1$ , тогда для любых  $0 < r_1 < r_2 < d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$

$$M_{\frac{p}{p-1}}(f(\Delta(C_1, C_2, D))) \leq \int_{R(z_0, r_1, r_2)} Q^{\frac{1}{p-1}}(z) \cdot \eta^{\frac{p}{p-1}}(|z - z_0|) dm(z) \quad (3.14)$$

для любой измеримой функции  $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ , такой, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr = 1. \quad (3.15)$$

#### 4 Конечная липшицевость нижних $Q$ -гомеоморфизмов относительно $p$ -модуля.

В дальнейшем рассматриваются открытые множества  $\Omega$  в  $\mathbb{C}$  и непрерывные отображения  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Для  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  и  $x \in \Omega \subseteq \mathbb{C}$ , положим

$$L(z, f) = \limsup_{\zeta \rightarrow z} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|}. \quad (4.1)$$

Будем говорить, что отображение  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  является *конечно липшицевым*, если

$$L(z, f) < \infty \quad (4.2)$$

для всех  $z \in \Omega$ . Очевидно, что каждое липшицево отображение является конечно липшицевым.

Ниже приведена теорема о достаточном условии локальной липшицевости в точке для нижних  $Q$ -гомеоморфизмов относительно  $p$ -модуля при  $p > 2$ .

**Лемма 2.** Пусть  $D$  и  $D'$  – области в  $\mathbb{C}$ ,  $Q : D \rightarrow [0, \infty]$  – локально интегрируемая функция и  $f : D \rightarrow D'$  – нижний  $Q$ -гомеоморфизм относительно  $p$ -модуля в точке  $z_0 \in D$  с условием

$$Q_0 = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{B(z_0, \varepsilon)} Q^{\frac{1}{p-1}}(z) dm(z) \right)^{p-1} < \infty.$$

Тогда при  $p > 2$  имеем

$$L(z_0, f) = \limsup_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \leq \lambda_p Q_0^{\frac{1}{p-2}},$$

где  $\lambda_p$  – положительная постоянная, зависящая только от  $p$ .



*Доказательство.* Рассмотрим сферическое кольцо  $R = R(z_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$  с  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$  такое, что  $R(z_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \subset D$ . Тогда  $(fB(z_0, \varepsilon_2), \overline{fB(z_0, \varepsilon_1)})$  – кольцевой конденсатор в  $D'$  и, согласно (??), имеем равенство

$$\text{cap}_{\frac{p}{p-1}}(fB(z_0, \varepsilon_2), \overline{fB(z_0, \varepsilon_1)}) = M_{\frac{p}{p-1}}(\Delta(\partial fB(z_0, \varepsilon_2), \partial fB(z_0, \varepsilon_1); fR))$$

а ввиду гомеоморфности  $f$ , равенство

$$\Delta(\partial fB(z_0, \varepsilon_2), \partial fB(z_0, \varepsilon_1); fR) = f(\Delta(\partial B(z_0, \varepsilon_2), \partial B(z_0, \varepsilon_1); R)).$$

Рассмотрим функцию

$$\eta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}, & t \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (\varepsilon_1, \varepsilon_2). \end{cases}$$

В силу определения кольцевого  $Q$ -гомеоморфизма относительно  $p$ -модуля, замечаем, что

$$\text{cap}_{\frac{p}{p-1}}(fB(z_0, \varepsilon_2), \overline{fB(z_0, \varepsilon_1)}) \leq (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^{-\frac{p}{p-1}} \int_{R(z_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)} Q^{\frac{1}{p-1}}(z) dm(z). \quad (4.3)$$

Далее, выбирая  $\varepsilon_1 = 2\varepsilon$  и  $\varepsilon_2 = 4\varepsilon$ , получим

$$\text{cap}_{\frac{p}{p-1}}(fB(z_0, 4\varepsilon), \overline{fB(z_0, 2\varepsilon)}) \leq (2\varepsilon)^{-\frac{p}{p-1}} \int_{B(z_0, 4\varepsilon)} Q^{\frac{1}{p-1}}(z) dm(z) \quad (4.4)$$

С другой стороны, в силу неравенства (2.5) вытекает оценка

$$\text{cap}_{\frac{p}{p-1}}(fB(z_0, 4\varepsilon), \overline{fB(z_0, 2\varepsilon)}) \geq C_p [m(fB(z_0, 2\varepsilon))]^{\frac{p-2}{2(p-1)}} \quad (4.5)$$

где  $C_p$  – положительная константа, зависящая только от  $p$ .

Комбинируя (4.4) и (4.5), получаем, что

$$\frac{m(fB(z_0, 2\varepsilon))}{m(B(z_0, 2\varepsilon))} \leq c_p \left[ \int_{B(z_0, 4\varepsilon)} Q^{\frac{1}{p-1}}(z) dm(z) \right]^{\frac{2(p-1)}{p-2}}, \quad (4.6)$$

где  $c_p$  – положительная постоянная зависящая только от  $p$ .

Далее, выбирая в (4.3)  $\varepsilon_1 = \varepsilon$  и  $\varepsilon_2 = 2\varepsilon$ , получим

$$\text{cap}_{\frac{p}{p-1}}(fB(z_0, 2\varepsilon), \overline{fB(z_0, \varepsilon)}) \leq \varepsilon^{-\frac{p}{p-1}} \int_{B(z_0, 2\varepsilon)} Q^{\frac{1}{p-1}}(z) dm(z). \quad (4.7)$$

С другой стороны, в силу неравенства (2.6), получаем

$$\operatorname{cap}_{\frac{p}{p-1}}(fB(z_0, 2\varepsilon), \overline{fB(z_0, \varepsilon)}) \geq \tilde{C}_p \frac{d^{\frac{p}{p-1}}(fB(z_0, \varepsilon))}{m^{\frac{1}{p-1}}(fB(z_0, 2\varepsilon))} \quad (4.8)$$

где  $\tilde{C}_p$  – положительная константа, зависящая только от  $p$ .

Комбинируя (4.7) и (4.8), получаем, что

$$\frac{d(fB(z_0, \varepsilon))}{\varepsilon} \leq \gamma_p \left( \frac{m(fB(z_0, 2\varepsilon))}{m(B(z_0, 2\varepsilon))} \right)^{\frac{1}{p(p-1)}} \left( \int_{B(z_0, 2\varepsilon)} Q^{\frac{1}{p-1}}(z) dm(z) \right)^{\frac{p-1}{p}},$$

где  $\gamma_p$  – положительная константа, зависящая только от  $p$ .

Эта оценка вместе с (4.6) дает неравенство

$$\frac{d(fB(z_0, \varepsilon))}{\varepsilon} \leq \lambda_p \left( \int_{B(z_0, 4\varepsilon)} Q^{\frac{1}{p-1}}(z) dm(z) \right)^{\frac{2(p-1)}{p(p-2)}} \left[ \int_{B(z_0, 2\varepsilon)} Q^{\frac{1}{p-1}}(z) dm(z) \right]^{\frac{p-1}{p}}.$$

Переходя к верхнему пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$  немедленно вытекает заключение леммы

$$L(z_0, f) = \limsup_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d(fB(z_0, \varepsilon))}{\varepsilon} \leq \lambda_p Q_0^{\frac{1}{p-2}},$$

где  $\lambda_p$  – положительная постоянная, зависящая только от  $p$ .

**Теорема 3.** Пусть  $D$  и  $D'$  – области в  $\mathbb{C}$ ,  $Q : D \rightarrow [0, \infty]$  – локально интегрируемая функция и  $f : D \rightarrow D'$  – нижний  $Q$ -гомеоморфизм относительно  $p$ -модуля  $D$  с условием

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{B(z_0, \varepsilon)} Q^{\frac{1}{p-1}}(z) dm(z) \right)^{p-1} < \infty \quad \forall x_0 \in D.$$

Тогда при  $p > 2$  гомеоморфизм  $f$  является конечно липшицевым.

**Замечание.** В соответствии с леммой 10.6 в [207] конечно липшицевые отображения обладают  $N$ -свойством относительно хаусдорфовых мер и, таким образом, являются абсолютно непрерывными на кривых.

## 5 Искажение площади круга.

В этом разделе получена оценка площади образа круга при нижних  $Q$ -гомеоморфизмах относительно  $p$ -модуля. Впервые оценка площади образа круга при квазиконформных отображениях встречается в монографии Лаврентьева М.А., см. [206].

**Теорема 3.1** Пусть  $f$  – нижний  $Q$ -гомеоморфизм  $\mathbb{B}$  в  $\mathbb{B}$  относительно  $p$ -модуля. Тогда при  $p > 2$  имеет место оценка

$$m(fB_r) \leq \pi \cdot \left( 1 + (2\pi)^{p-1}(p-2) \int_r^1 \frac{dt}{\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(t)} \right)^{\frac{2}{2-p}}, \quad (5.1)$$

а при  $p = 2$

$$m(fB_r) \leq \pi \exp \left\{ -4\pi \int_r^1 \frac{dt}{\|Q\|_1(t)} \right\}. \quad (5.2)$$

*Доказательство.* Рассмотрим сферическое кольцо  $R_t = \{x \in \mathbb{B}^n : t < |x| < t + \Delta t\}$ . Пусть  $(A_{t+\Delta t}, C_t)$  – конденсатор, где  $C_t = \overline{B}_t$ ,  $A_{t+\Delta t} = \overline{B}_{t+\Delta t}$ . Тогда  $(fA_{t+\Delta t}, fC_t)$  – кольцевой конденсатор в  $\mathbb{C}$  и согласно (2.3) имеем

$$\text{cap}_{\frac{p}{p-1}}(fA_{t+\Delta t}, fC_t) = M_{\frac{p}{p-1}}(\Delta(\partial fA_{t+\Delta t}, \partial fC_t; fR_t)). \quad (5.3)$$

В силу неравенства (2.4) получим

$$\text{cap}_{\frac{p}{p-1}}(fA_{t+\Delta t}, fC_t) \geq \frac{(\inf m_1 \sigma)^{\frac{p}{p-1}}}{m(fA_{t+\Delta t} \setminus fC_t)^{\frac{1}{p-1}}}, \quad (5.4)$$

где  $m_1 \sigma$  – 1-мерная мера Лебега  $C^\infty$ -многообразия  $\sigma$ , являющегося границей  $\sigma = \partial U$  ограниченного открытого множества  $U$ , содержащего  $fC_t$  и содержащегося вместе со своим замыканием  $\overline{U}$  в  $fA_{t+\Delta t}$ , а точная нижняя грань берется по всем таким  $\sigma$ .

С другой стороны, в силу леммы 2.1, имеем

$$\text{cap}_{\frac{p}{p-1}}(fA_{t+\Delta t}, fC_t) \leq \left( \int_t^{t+\Delta t} \frac{dr}{\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(r)} \right)^{-\frac{1}{p-1}}. \quad (5.5)$$

Комбинируя неравенства (5.4) и (5.5), получим

$$\frac{(\inf m_1 \sigma)^{\frac{p}{p-1}}}{m(fA_{t+\Delta t} \setminus fC_t)^{\frac{1}{p-1}}} \leq \left( \int_t^{t+\Delta t} \frac{dr}{\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(r)} \right)^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Далее, воспользовавшись изопериметрическим неравенством

$$\inf m_1 \sigma \geq 2 \cdot \pi^{\frac{1}{2}} (m(fC_t))^{\frac{1}{2}},$$

получим

$$2 \cdot \pi^{\frac{1}{2}} (m(fC_t))^{\frac{1}{2}} \leq \left( \frac{m(fA_{t+\Delta t} \setminus fC_t)}{t+\Delta t \int_t^{\frac{dr}{\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(r)}}} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (5.6)$$

Полагая  $\Phi(t) := m(fB_t)$ , из соотношения (5.6) имеем, что

$$2 \cdot \pi^{\frac{1}{2}} \Phi^{\frac{1}{2}}(t) \leq \left( \frac{\frac{\Phi(t+\Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t}}{\frac{1}{\Delta t} \int_t^{\frac{dr}{\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(r)}}} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (5.7)$$

Заметим, что в силу теоремы 2.3 и гомеоморфности отображения  $f$ ,

$$\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}^{-1}(r) \in L_{loc}^1(0, 1)$$

Устремляя в неравенстве (5.7)  $\Delta t$  к нулю, и учитывая монотонное возрастание функции  $\Phi(t)$  по  $t \in (0, 1)$  и равенство  $\omega_{n-1} = n\Omega_n$ , для п.в.  $t$  имеем существование производной  $\Phi'(t)$  и

$$2^p \pi^{\frac{p}{2}} \|Q\|_{\frac{1}{p-1}}^{-1}(t) \leq \frac{\Phi'(t)}{\Phi^{\frac{p}{2}}(t)}. \quad (5.8)$$

Рассмотрим неравенство (5.8) при  $p > 2$ . Интегрируя обе части неравенства по  $t \in [r, 1]$  и учитывая, что

$$\int_r^1 \frac{\Phi'(t)}{\Phi^{\frac{p}{2}}(t)} dt \leq \frac{2}{2-p} \left( \Phi^{\frac{2-p}{2}}(1) - \Phi^{\frac{2-p}{2}}(r) \right),$$

см., напр., теорему IV. 7.4 в [212], получим

$$2^p \pi^{\frac{p}{2}} \int_r^1 \frac{dt}{\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(t)} \leq \frac{2}{2-p} \left( \Phi^{\frac{2-p}{2}}(1) - \Phi^{\frac{2-p}{2}}(r) \right). \quad (5.9)$$

Из неравенства (5.9) получаем, что

$$\Phi(r) \leq \left( \Phi^{\frac{2-p}{2}}(1) - 2^{p-1}(2-p)\pi^{\frac{p}{2}} \int_r^1 \frac{dt}{\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(t)} \right)^{\frac{2}{2-p}}.$$

Наконец, учитывая, что  $m(f\mathbb{B}) \leq \pi$ , приходим к (5.1).

Осталось рассмотреть случай  $p = 2$ . В этом случае неравенство (5.8) примет вид:

$$\frac{4\pi}{\|Q\|_1(t)} \leq \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}. \quad (5.10)$$

Интегрируя обе части неравенства (5.10) по  $t \in [r, 1]$ , учитывая, что

$$\int_r^1 \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} dt \leq \ln \frac{\Phi(1)}{\Phi(r)},$$

см., напр., теорему IV. 7.4 в [212], получим

$$4\pi \int_r^1 \frac{dt}{\|Q\|_1(t)} \leq \ln \frac{\Phi(1)}{\Phi(r)}.$$

И, следовательно, имеем

$$\exp \left\{ 4\pi \int_r^1 \frac{dt}{\|Q\|_1(t)} \right\} \leq \frac{\Phi(1)}{\Phi(r)},$$

а потому

$$\Phi(r) \leq \Phi(1) \cdot \exp \left\{ -4\pi \int_r^1 \frac{dt}{\|Q\|_1(t)} \right\},$$

что и приводит нас к неравенству (5.2) поскольку  $\Phi(1) \leq \pi$ .

□

## 6 Поведение в точке.

Теорема, приведенная в предыдущей секции, позволяет нам также описать асимптотическое поведение кольцевых  $Q$ -гомеоморфизмов относительно  $p$ -модуля в нуле.

**Предложение 4.1.** Пусть  $f$  – гомеоморфизм  $\mathbb{C}$  в  $\mathbb{C}$ ,  $f(0) = 0$ . Если

$$m(fB_r) \leq \pi \mathcal{R}^2(r), \quad (6.1)$$

то

$$\liminf_{z \rightarrow 0} \frac{|f(z)|}{\mathcal{R}(|z|)} \leq 1. \quad (6.2)$$

*Доказательство.* Положим  $l_f(r) = \min_{|z|=r} |f(z)|$ . Тогда, учитывая, что  $f(0) = 0$ , получаем  $\pi l_f^2(r) \leq m(fB_r)$  и, следовательно,

$$l_f(r) \leq \left( \frac{m(fB_r)}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.3)$$

Таким образом, учитывая неравенство (6.1), имеем

$$\liminf_{z \rightarrow 0} \frac{|f(z)|}{\mathcal{R}(|z|)} = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{l_f(r)}{\mathcal{R}(r)} \leq \liminf_{r \rightarrow 0} \left( \frac{m(fB_r)}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\mathcal{R}(r)} \leq 1.$$

Предложение доказано.  $\square$

Комбинируя теорему 3.1 и предложение 4.1 с функцией

$$\mathcal{R}(r) = \left( 1 + (2\pi)^{p-1}(p-2) \int_r^1 \frac{dt}{\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(t)} \right)^{-\frac{1}{p-2}}$$

при  $p > 2$  и

$$\mathcal{R}(r) = \exp \left\{ -2\pi \int_r^1 \frac{dt}{\|Q\|_1(t)} \right\}$$

при  $p = 2$ , получаем следующий результат.

**Теорема 4.2.** Пусть  $f$  – кольцевой  $Q$ -гомеоморфизм относительно  $p$ -модуля  $\mathbb{B}$  в  $\mathbb{B}$ , и  $f(0) = 0$ . Тогда при  $p > 2$  имеет место оценка

$$\liminf_{z \rightarrow 0} |f(z)| \cdot \left( 1 + (2\pi)^{p-1}(p-2) \int_{|z|}^1 \frac{dt}{\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(t)} \right)^{\frac{1}{p-2}} \leq 1, \quad (6.4)$$

а при  $p = 2$

$$\liminf_{z \rightarrow 0} |f(z)| \cdot \exp \left\{ 2\pi \int_{|z|}^1 \frac{dt}{\|Q\|_1(t)} \right\} \leq 1. \quad (6.5)$$

**Следствие 4.3.** Пусть  $f$  – нижний  $Q$ -гомеоморфизм относительно  $p$ -модуля  $\mathbb{B}$  в  $\mathbb{B}$  и  $f(0) = 0$ . Тогда при  $p > 2$  имеет место оценка

$$\liminf_{z \rightarrow 0} |f(z)| \cdot \left( \int_{|z|}^1 \frac{dt}{\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(t)} \right)^{\frac{1}{p-2}} \leq (2\pi)^{1-p}(p-2)^{\frac{1}{2-p}}. \quad (6.6)$$

## 7 О взаимосвязи с классами Соболева

**Теорема 7.1.** Пусть  $D$  и  $D'$  – области в  $\mathbb{C}$  и  $f : D \rightarrow D'$  – гомеоморфизм класса Соболева  $W_{\text{loc}}^{1,1}$  с конечным искажением. Тогда  $f$  является нижним  $Q$ -гомеоморфизмом относительно  $p$ -модуля в каждой точке  $z_0 \in D$  с  $Q(z) = K_p(f, z)$ .

*Доказательство.* Пусть  $\mathfrak{B}$  – множество (борелевское!) всех точек  $z$  из  $D$ , в которых  $f$  имеет полный дифференциал с  $J_f(z) \neq 0$ . Известно, что  $\mathfrak{B}$  можно представить в виде объединения счетного набора борелевских множеств  $\mathfrak{B}_l$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , таких, что  $f_l = f|_{\mathfrak{B}_l}$  являются билипшицевыми гомеоморфизмами, см., например, лемму 3.2.2 в [37]. Без потери общности можно считать, что  $\mathfrak{B}_l$  попарно не пересекаются. Пусть  $\mathfrak{B}_*$  – множество всех точек  $z \in D$ , где  $f$  имеет полный дифференциал с  $f_z = 0 = f_{\bar{z}}$ .

Заметим, что по известной теореме Геринга–Лехто–Меньшова множество  $\mathfrak{B}_0 = D \setminus (\mathfrak{B} \cup \mathfrak{B}_*)$  имеет нулевую меру Лебега в  $\mathbb{C}$ , см. [48] и [127]. Следовательно, по теореме 2.11 в [94], см. также лемму 9.1 в [207],  $l(\gamma \cap \mathfrak{B}_0) = 0$  для п.в. штриховых линий  $\gamma$  в  $D$ . Покажем также, что  $l(f(\gamma) \cap f(\mathfrak{B}_0)) = 0$  для п.в. окружностей  $\gamma$  с центром в точке  $z_0$ .

Последнее вытекает из абсолютной непрерывности  $f$  на замкнутых поддугах  $\gamma \cap D$  для п.в. окружностей  $\gamma$ . Действительно, класс  $W_{\text{loc}}^{1,1}$  является инвариантным относительно локально квазиизометрических преобразований независимой переменной, см., например, теорему 1.1.7 в [125], и функции из  $W_{\text{loc}}^{1,1}$  абсолютно непрерывны на линиях, см., например, теорему 1.1.3 в [125]. Применяя, к примеру, преобразование координат  $\log(z - z_0)$ , мы приходим к абсолютной непрерывности на п.в. окружностях  $\gamma$  с центром в точке  $z_0$ .

Таким образом,  $l(\gamma_* \cap f(\mathfrak{B}_0)) = 0$ , где  $\gamma_* = f(\gamma)$ , для п.в. окружностей  $\gamma$  с центром в точке  $z_0$ . Пусть теперь  $\varrho_* \in \text{adm } f(\Gamma)$ ,  $\varrho_* \equiv 0$  вне  $f(D)$ , где  $\Gamma$  – совокупность всех штриховых линий, образованных пересечениями всех окружностей  $\gamma$  с центром в точке  $z_0$ . Пусть  $\varrho \equiv 0$  вне  $D$  и

$$\varrho(z) := \varrho_*(f(z))(|f_z| + |f_{\bar{z}}|) \quad \text{для п.в. } z \in D.$$

Рассуждая кусочно на  $\mathfrak{B}_l$ , мы имеем по теореме 3.2.5 из [37] (при  $m = 1$ ), что

$$\int_{\gamma} \varrho ds \geq \int_{\gamma_*} \varrho_* ds_* \geq 1 \quad \text{для п.в. } \gamma \in \Gamma,$$

поскольку  $l(f(\gamma) \cap f(\mathfrak{B}_0)) = 0$ , а также  $l(f(\gamma) \cap f(\mathfrak{B}_*)) = 0$  для  $p$ -п.в.  $\gamma \in \Gamma$  ввиду абсолютной непрерывности  $f$  на  $p$ -п.в.  $\gamma \in \Gamma$ . Следовательно,  $\varrho \in \text{ext}_p \text{adm } \Gamma$ .

С другой стороны, еще раз рассуждая кусочно на  $\mathfrak{B}_l$ , мы имеем неравенство

$$\int_D \frac{\varrho^p(x)}{K_{O,p}(z, f)} dm(z) \leq \int_{f(D)} \varrho_*^p(w) dm(w),$$

поскольку  $\varrho(z) = 0$  на  $\mathfrak{B}_*$ . Следовательно, мы получаем, что

$$M_p(f\Gamma) \geq \inf_{\varrho \in \text{ext}_p \text{ adm } \Gamma} \int_D \frac{\varrho^p(z)}{K_p(z, f)} dm(z),$$

т.е.,  $f$  действительно является нижним  $Q$ -гомеоморфизмом с  $Q(z) = K_p(z, f)$  относительно  $p$ -модуля.  $\square$

## Список литературы

- [1] *Alberico A., Cianchi A.* Differentiability properties of Orlicz-Sobolev functions // Ark. Mat. – 2005. – **43**. – P. 1–28.
- [2] *Ahlfors L.* Conformal invariants (Topics in Geometric Function theory). – McGraw-Hill, New. York, 1973.
- [3] *Ahlfors L., Beurling A.* Conformal invariants and function-theoretic null-sets // Acta Math. – 1950. – **83**. – P. 101–129.
- [4] *Ambrosio L.* Metric space valued functions of bounded variation // Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). – 1990. – **17**, no. 3. – P. 439–478.
- [5] *Anderson G. D., Vamanamurthy M. K., Vuorinen M.* Conformal invariants, quasiconformal maps and special functions // Lecture Notes in Math. – 1992. – V. 1508. – P. 1–19.
- [6] *Andreian Cazacu C.* Moduli inequalities for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 1976. – 2. – P. 17–28.
- [7] *Astala K., Iwaniec T., Koskela P., Martin G.* Mappings of BMO-bounded distortion // Math. Ann. – 2000. – **317**. – P. 703–726.
- [8] *Astala K., Iwaniec T., Martin G.* Elliptic Partial Differential Equations and Quasiconformal Mappings in the Plane. – Princeton University Press, 2009. – 677 p.



- [9] *Balogh Z.M.* Hausdorff dimension distribution of quasiconformal mappings on the Heisenberg group // *J. Anal. Math.* – 2001. – **83**. – P. 289–312.
- [10] *Balogh Z., Koskela, P.* Quasiconformality, quasisymmetry, and removability in Loewner spaces // With an appendix by Jussi Vaisala. *Duke Math. J.* – 2000. – **101**, 3. – P. 554–577.
- [11] *Balogh Z.M., Monti R., Tyson J.T.* Frequency of Sobolev and quasiconformal dimension distortion // *Research Report 2010-11*, 22.07.2010. – P. 1–36.
- [12] *Bates S.M.* On the image size of singular maps // *Proc. Amer. Math. Soc.* – 1992. – **114**. – P. 699–705.
- [13] *Birnbaum Z., Orlicz W.* Über die Verallgemeinerungen des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen // *Studia. Math.* – 1931. – **3**. – P. 1–67.
- [14] *Bishop C.J.* Quasiconformal mappings which increase dimension // *Ann. Acad. Sci. Fenn.* – 1999. – **24**. – P. 397–407.
- [15] *Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Preprint, Department of Mathematics, University of Helsinki. – 2000. – **256**. – 22 pp.
- [16] *Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // *Intern. Journ. Math. and Math. Sci.* – 2003. – **22**. – P. 1397–1420.
- [17] *Bojarski B., Hajlasz P., Strzelecki P.* Sard’s theorem for mappings in Hölder and Sobolev spaces // *Manuscripta Math.* – 2005. – **118**. – P. 383–397.
- [18] *Bojarski B., Iwaniec T.* Analytical foundations of the theory of quasiconformal mappings in  $\mathbb{R}^n$  // *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math.* – 1983. – **8**, no. 2. – P. 257–324.
- [19] *Bojarski B., Gutlyanskii V., Ryazanov V.* On Beltrami equations with two characteristics // *Comp. Var. Ell. Equ.* – 2009. – **54**, 10. – P. 933–950.
- [20] *Bojarski B., Gutlyanskii V., Ryazanov V.* General Beltrami equations and BMO // *Ukr. Math. Bull.* – 2008. – **5**, no. 3 – P. 305–326.

- [21] *Bourbaki N.* Functions of one real variable. – Moscow: Nauka, 1965. [in Russian].
- [22] *Brakalova M.A., Jenkins J.A.* On solutions of the Beltrami equation. II. // Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.). – 2004. – **75**(89). – P. 3–8.
- [23] *Brakalova M.A., Jenkins J.A.* On solutions of the Beltrami equation // J. Anal. Math. – 1998. – **76**. – P. 67–92.
- [24] *Brania A., Yang Sh.* Domains with controlled modulus and quasiconformal mappings // Nonlinear Stud. – 2002. – **9**, 1. – P. 57–73.
- [25] *Calderon A.P.* On the differentiability of absolutely continuous functions // Riv. Math. Univ. Parma. – 1951. – **2**. – P. 203–213.
- [26] *Cesary L.* Sulle funzioni assolutamente continue in due variabili // Ann. Scuola Norm. Super. – 1941. – **10**(2). – P. 91–101.
- [27] *Cesari L.* Sulle trasformazioni continue // Annali di Mat. Pura ed Appl. – 1942. – **IV**, no. 21. – P. 157–188.
- [28] *Cianchi A.* A sharp embedding theorem for Orlicz-Sobolev spaces // Indiana Univ. Math. J. – 1996. – **45**, no. 1. – P. 39–65.
- [29] *Chiarenza F., Frasca M., Longo P.*  $W^{2,p}$ -solvability of the Dirichlet problem for nondivergence elliptic equations with *VMO* coefficients // Trans. Amer. Math. Soc. – 1993. – **336**, no. 2. – P. 841–853.
- [30] *Church P.T., Timourian J.G.* Differentiable Maps with Small Critical Set or Critical Set Image // Indiana Univ. Math. J. – 1978. – **27**. – P. 953–971.
- [31] *Church P.T., Timourian J.G.* Maps having 0-dimensional critical set image // Indiana Univ. Math. J. – 1978. – **27**. – P. 813–832.
- [32] *Csörnyei M., Hencl S., Maly J.* Homeomorphisms in the Sobolev space  $W^{1,n-1}$  // Preprint MATH-KMA-2007/252, Prague Charles Univ. – 2007. – **252**. – P. 1–15.
- [33] *David G.* Solutions de l'equation de Beltrami avec  $\|\mu\|_\infty = 1$  // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1988. – **13**. – P. 25–70.
- [34] *Donaldson T.* Nonlinear elliptic boundary-value problems in Orlicz-Sobolev spaces // J. Diff. Eq. – 1971. – **10**. – P. 507–528.

- [35] *Dybov Yu.* On regular solutions of the Dirichlet problem for the Beltrami equations // Complex Var. Elliptic Equ. – 2010. – **55**, № 12. – P. 1099–1116.
- [36] *Fadell A.G.* A note on a theorem of Gehring and Lehto // Proc. Amer. Math. Soc. – 1975. – **49**. – P. 195–198.
- [37] *Federer H.* Geometric Measure Theory. – Springer, Berlin etc., 1969. – 676 p.
- [38] *Ferrand J.* Conformal capacity and conformally invariant functions on manifolds // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I. – 1994. – 218. – P. 213–216.
- [39] *Ferrand J.* Conformal capacity and conformally invariant metrics // Pacific J. Math. – 1997. – **180**, 1. – P. 41–49.
- [40] *Freedman M.H., He Z.-X.* Divergence free fields: Energy and asymptotic crossing number // Ann. of Math. – 1991. – **134**, 1. – P. 189–229.
- [41] *Freedman M.H., He Z.-X.* Links of tori and the energy of incompressible flows // Topology. – 1991. – **30**, 2. – P. 283–287.
- [42] *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Acta Math. – 1957. – **98**. – P. 171–219.
- [43] *Gehring F.W.* Symmetrization of rings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1961. – **101**. – P. 499–519.
- [44] *Gehring F.W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – **103**. – P. 353–393.
- [45] *Gehring F.W.* Lipschitz mappings and the  $p$ -capacity of ring in  $n$ -space // Advances in the theory of Riemann surfaces (Proc. Conf. Stonybrook, N.Y., 1969), Ann. of Math. Studies. – 1971. – **66**. – P. 175–193.
- [46] *Gehring F.W.* The  $L^p$ -integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping // Acta Math. – 1973. – **130**. – P. 265–277.
- [47] *Gehring F.W.* Quasiconformal mappings, in Complex Analysis and its Applications, V. 2. – International Atomic Energy Agency: Vienna, 1976.

- [48] *Gehring F.W., Lehto O.* On the total differentiability of functions of a complex variable // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1959. – **272**. – P. 3–8.
- [49] *Gehring F.W., Martio O.* Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings // J. Anal. Math. – 1985. – **45**. – P. 181–206.
- [50] *Gehring F.W., Väisälä J.* Hausdorff dimension and quasiconformal mappings // J. London Math. Soc. – 1973. – **6**, no. 2. – P. 504–512.
- [51] *Gehring F.W., Väisälä J.* The coefficients of quasiconformality of domains in space // Acta Math. – 1965. – **114**. – P. 1–70.
- [52] *Golberg A.* Differential properties of  $(\alpha, Q)$ -homeomorphisms // Further Progress in Analysis, World Scientific Publ. – 2009. – P. 218–228.
- [53] *Golberg A.* Integrally quasiconformal mappings in space // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – **7**, № 2. – С. 53–64.
- [54] *Gossez J.-P., Mustonen V.* Variational inequalities in Orlicz-Sobolev spaces // Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl. – 1987. – **11**. – P. 379–392.
- [55] *Grinberg E.L.* On the smoothness hypothesis in Sard's theorem // Amer. Math. Monthly. – 1985. – **92**, no. 10. – P. 733–734.
- [56] *Gutlyanskii V.Y., Ryazanov V.I.* On quasiconformal mappings with integral restrictions to the Lavrentieff characteristics // Siberian Math. J. – 1990. – **31**, no. 2. – P. 21–36.
- [57] *Gutlyanskii V.Y., Martio O., Ryazanov V.I., Vuorinen M.* On convergence theorems for space quasiregular mappings // Forum Math. – 1998. – **10**. – P. 353–375.
- [58] *Gutlyanskii V.Ya., Golberg A.* On Lipschitz continuity of quasiconformal mappings in space // J. d'Anal. Math. – 2009. – **109**, no. 1. – P. 233–251.
- [59] *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami Equation: A Geometric Approach, Developments in Mathematics, vol. 26. – New York: Springer, 2012. – 314 p.

- [60] *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On recent advances in the degenerate Beltrami equations // Укр. мат. вісник. – 2010. – **7**, № 4. – С. 467–515; transl in J. Math. Sci. – 2011. – **175**. – P. 413–449.
- [61] *Gutlyanski V., Martio O., Sugawa T., Vuorinen M.* On the degenerate Beltrami equation // Trans. Amer. Math. Soc. – 2005. – **357**, no. 3. – P. 875–900.
- [62] *Gutlyanski V., Sugawa T.*, On Lipschitz continuity of quasiconformal mappings // Rep. Univ. – 2001. – **83**. – P. 91–108.
- [63] *Gutlyanski V., Vuorinen M.*, On maps almost conformal at the boundary // Complex Var. Theory Appl. – 1997. – **34**. – P. 445–464.
- [64] *Hajlasz P.* Sobolev spaces on an arbitrary metric space // Potential Anal. – 1996. – **5**. – P. 403–415.
- [65] *Hajlasz P.* Whitney’s example by way of Assouad’s embedding // Proc. Amer. Math. Soc. – 2003. – **131**. – P. 3463–3467.
- [66] *Hardy G.H., Littlewood J.E., Polia G.* Inequalities. – Cambridge University Press, Cambridge, 1934.
- [67] *Heinonen J.* A capacity estimate on Carnot groups // Bull. Sci. Math. – 1995. – **119**, 1. – P. 475–484.
- [68] *Heinonen J.* Lectures on Analysis on Metric Spaces. – Springer, New York etc., 2000. – 150 p.
- [69] *Heinonen J., Holopainen I.* Quasiregular mappings on Carnot groups // J. Geom. Anal. – 1997. – **7**, 1. – P. 109–148.
- [70] *Heinonen J., Kilpelainen T., Martio O.* Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations. – Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford–New York–Tokio, 1993.
- [71] *Heinonen J., Koskela P.* Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry // Acta Math. – 1998. – **181**. – P. 1–41.
- [72] *Heinonen J., Koskela P., Shanmugalingam P., Tyson J.T.* Sobolev spaces of Banach space-valued functions and quasiconformal mappings // J. Anal. Math. – 2001. – **85**. – P. 87–139.

- [73] *Hencl S., Koskela P.* Regularity of the inverse of a planar Sobolev homeomorphism // Arch. Rat. Mech. Anal. – **180**, 1. – 2006. – P. 75–95.
- [74] *Herron D.A., Koskela P.* Locally uniform domains and quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1995. – **20**. – P. 187–206.
- [75] *Hesse J.* A  $p$ -extremal length and  $p$ -capacity equality // Ark. Mat. – 1975. – **13**. – P. 131–144.
- [76] *Hsini M.* Existence of solutions to a semilinear elliptic system through generalized Orlicz-Sobolev spaces // J. Partial Differ. Equ. – 2010. – **23**, no. 2. – P. 168–193.
- [77] *Hurewicz W., Wallman H.* Dimension Theory. – Princeton Univ. Press, Princeton, 1948.
- [78] *Ignat'ev A., Ryazanov V.* To the theory of the boundary behavior of space mappings // Ukrainian Math. Bull. – 2006. – **3**, 2. – P. 189–201.
- [79] *Iwaniec T., Koskela P., Onninen J.* Mappings of finite distortion: Compactness // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 2002. – **27**, no. 2. – P. 391–417.
- [80] *Iwaniec T., Koskela P., Onninen J.* Mappings of finite distortion: Monotonicity and continuity // Invent. Math. – 2001. – **144**(3). – P. 507–531.
- [81] *Iwaniec T., Martin G.* Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis. – Clarendon Press, Oxford, 2001. – 568 p.
- [82] *Iwaniec T., Sbordone C.* Riesz transforms and elliptic PDEs with VMO coefficients // J. d'Anal. Math. – 1998. – **74**. – P. 183–212.
- [83] *Iwaniec T., Sverák V.* On mappings with integrable dilatation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1993. – **118**. – P. 181–188.
- [84] *Ikoma K.* On the distortion and correspondence under quasiconformal mappings in space // Nagoya Math. J. – 1965. – **25**. – P. 175–203.
- [85] *John F., Nirenberg L.* On functions of bounded mean oscillation // Comm. Pure Appl. Math. – 1961. – **14**. – P. 415–426.

- [86] *Kaufman R.* A singular map of a cube onto a square // J. Diff. Geom. – 1979. – **14**. – P. 593–594.
- [87] *Kauhanen J., Koskela P., Maly J.* On functions with derivatives in a Lorentz space // Manuscripta Math. – 1999. – **10**. – P. 87–101.
- [88] *Kirszbraun M.D.* Uber die zusammenziehende und Lipschitzsche Transformationen // Fund. Math. J. – 1934. – **22**. – P. 77–108.
- [89] *Khruslov E.Ya., Pankratov L.S.* Homogenization of the Dirichlet variational problems in Sobolev-Orlicz spaces. – Operator theory and its applications (Winuipeg, MB, 1998), 345–366, Fields Inst. Commun., 25, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [90] *Kovalev L.V.* Monotonicity of generalized reduced modulus // Zapiski Nauch. Sem. POMI. – 2001. – **276**. – P. 219–236.
- [91] *Kovalev L., Onninen J.* Boundary values of mappings of finite distortion // Rep. Univ. Jyvaskyla Dep. Math. Stat. – 2003. – Vol. 92. – P. 175–182.
- [92] *Kovtonyuk D., Petkov I., Ryazanov V.* On homeomorphisms with finite distortion in the plane // ArXiv: 1011.3310v2 [math.CV], 18 Nov. 2010. – P. 1–16.
- [93] *Kovtonyuk D., Ryazanov V.* To the theory of lower  $Q$ –homeomorphisms // Укр. матем. вісник. – 2008. – **5**, № 2. – С. 157–181.
- [94] *Kovtonyuk D., Ryazanov V.* On the theory of mappings with finite area distortion // J. Anal. Math. – 2008. – **104**. – P. 291–306.
- [95] *Kovtonyuk D., Ryazanov V.* Toward the theory of generalized quasi-isometries // Мат. Студ. – 2010. – **34**, 2. – С. 129–135.
- [96] *Kovtonyuk D., Ryazanov V.* On boundary behavior of generalized quasi-isometries // ArXiv: 1005.0247v1 [math.CV], 3 May 2010. – 20 p.
- [97] *Kovtonyuk D., Ryazanov V.* On the boundary behavior of generalized quasi-isometries // J. Anal. Math. – 2011. – **115**. – P. 103–119.
- [98] *Kovtonyuk D., Ryazanov V., Salimov R., Sevost'yanov E.* On mappings in the Orlicz-Sobolev classes // ArXiv: 1012.5010v4 [math.CV], 12 Jan. 2012. – P. 1–42.

- [99] *Kolomoitsev Yu., Ryazanov V.* Uniqueness of approximate solutions of the Beltrami equations // Proc. Inst. Appl. Math. & Mech. NASU. – 2009. – **19**. – P. 116–124.
- [100] *Koskela P., Maly J.* Mappings of finite distortion: The zero set of Jacobian // J. Eur. Math. Soc. – 2003. – **5**, 2. – P. 95–105.
- [101] *Koranyi A., Reimann H.* Quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Invent, math. – 1985. – V. 80. – P. 309–338.
- [102] *Koranyi A., Reimann H.* Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Adv. Math. – 1995. – **111**, 1. – P. 1–87.
- [103] *Koronel J.D.* Continuity and  $k$ -th order differentiability in Orlicz-Sobolev spaces:  $W^k L_A$  // Israel J. Math. – 1976. – **24**, no. 2. – P. 119–138.
- [104] *Landes R., Mustonen V.* Pseudo-monotone mappings in Sobolev-Orlicz spaces and nonlinear boundary value problems on unbounded domains // J. Math. Anal. Appl. – 1982. – **88**. – P. 25–36.
- [105] *Lappalainen V., Lehtonen A.* Embedding of Orlicz-Sobolev spaces in Hölder spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1989. – **14**, no. 1. – P. 41–46.
- [106] *Lee John M.* Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature. – New York: Springer, 1997.
- [107] *Lehto O.* On the differentiability of quasiconformal mappings with prescribe complex dilatation // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1 Math. – 1960. – **275**. – P. 1–28.
- [108] *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal Mappings in the Plane. – Springer-Verlag, New York, 1973. – 258 p.
- [109] *Lelong-Ferrand J.* Invariant conform globaux sur les varietes Riemanniennes // J. Diff. Geom. – 1973. – **8**. – P. 487–510.
- [110] *Lomako T., Salimov R., Sevost'yanov E.* On equicontinuity of solutions to the Beltrami equations // Ann. Univ. Bucharest, Math. Ser. – 2010. – **LIX**, no. 2. – P. 263–274.
- [111] *Lomako T., Ryazanov V.* On a variational method for the Beltrami equations // Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math. – 2011. – **60**, no. 2. – P. 3–14.



- [112] *Maly J.* A simple proof of the Stepanov theorem on differentiability almost everywhere // Exposition Math. – 1999. – **17**. – P. 59–61.
- [113] *Maly J., Martio O.* Lusin’s condition  $(N)$  and mappings of the class  $W^{1,n}$  // J. Reine Angew. Math. – 1995. – **485**. – P. 19–36.
- [114] *Marcus M., Mizel V.* Transformations by functions in Sobolev spaces and lower semicontinuity for parametric variational problems // Bull. Amer. Math. Soc. – 1973. – **79**, no. 4. – P. 790–795.
- [115] *Margulis G.A., Mostow G.D.* The differential of quasi-conformal mapping of a Carnot–Caratheodory spaces // Geom. Func. An. – 1995. – **5**, 2. – P. 402–433.
- [116] *Martio O.* Modern tools in the theory of quasiconformal maps // Texts in Math. Ser. B, **27**, Univ. Coimbra, Dept. Mat., Coimbra. – 2000. – P. 1–43.
- [117] *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1969. – **448**. – P. 1–40.
- [118] *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Mappings with finite length distortion // J. Anal. Math. – 2004. – **93**. – P. 215–236.
- [119] *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.*  $Q$ -homeomorphisms // Contemporary Math. – 2004. – **364**. – P. 193–203.
- [120] *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On  $Q$ -homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 2005. – **30**. – P. 49–69.
- [121] *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory, Springer Monographs in Mathematics. – Springer, New York etc., 2009. – 367 p.
- [122] *Martio O., Ryazanov V., Vuorinen M.* BMO and Injectivity of Space Quasiregular Mappings // Math. Nachr. – 1999. – **205**. – P. 149–161.
- [123] *Martio O., Sarvas J.* Injectivity theorems in plane and space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math. – 1978/1979. – **4**. – P. 384–401.

- [124] *Mattila P.* Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. Fractals and rectifiability. – Cambridge University Press, Cambridge, 1995. – 356 p.
- [125] *Maz'ya V.* Sobolev Spaces. – Springer-Verlag, Berlin, 1985. – 486 p.
- [126] *McShane E.J.* Extension of range of functions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1934. – **40**. – P. 837–842.
- [127] *Menchoff D.* Sur les differencelles totales des fonctions univalentes // Math. Ann. – 1931. – **105**. – P. 75–85.
- [128] *Mitchell J.* On Carnot-Caratheodory metrics // J. Diff. Geom. – 1985. – V. 21. – P. 35–45.
- [129] *Nakki R.* Boundary behavior of quasiconformal mappings in  $n$ -space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math. – 1970. – **484**. – P. 1–50.
- [130] *Norton A.* A critical set with nonnull image has large Hausdorff dimension // Trans. Amer. Math. Soc. – 1986. – **296**, no. 1. – P. 367–376.
- [131] *Ohtsuka M.* Extremal length and precise functions. – Tokyo: Gakkotosho Co., Ltd., 2003.
- [132] *Onninen J.* Differentiability of monotone Sobolev functions // Real. Anal. Exchange. – 2000/2001. – **26**, no. 2. – P. 761–772.
- [133] *Orlicz W.* Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B // Bull. Intern. de l'Acad. Pol. Serie A, Cracovie. – 1932. – P. 207–220.
- [134] *Orlicz W.* Über Räume ( $L^M$ ) // Bull. Intern. de l'Acad. Pol. Serie A, Cracovie. – 1936. – P. 93–107.
- [135] *Palagachev D.K.* Quasilinear elliptic equations with VMO coefficients // Trans. Amer. Math. Soc. – 1995. – **347**, no. 7. – P. 2481–2493.
- [136] *Pansu P.* Metriques de Carnot-Caratheodory et quasiisometries des espaces symetriques de rang un // Ann. of Math. – 1989. – V. 119. – P. 1–60.
- [137] *Quinn F., Sard A.* Hausdorff conullity of critical images of Fredholm maps // Amer. J. Math. – 1972. – **94**. – P. 1101–1110.

- [138] *Rado T., Reichelderfer P.V.* Continuous Transformations in Analysis. – Springer-Verlag, Berlin, 1955. – 441 p.
- [139] *Ragusa M.A.* Elliptic boundary value problem in vanishing mean oscillation hypothesis // Comment. Math. Univ. Carolin. – 1999. – **40**, no. 4. – P. 651–663.
- [140] *Rajala K., Zapadinskaya A., Zürcher T.* Generalized Hausdorff dimension distortion in euclidean spaces under Sobolev mappings // arXiv:1007.2091v1 [math.CA], 2010. – P. 1–13.
- [141] *Ransford T.* Potential Theory in the Complex Plane. – Cambridge University Press, 1995. – 244 p.
- [142] *E. Reich, H. Walczak* On the behavior of quasiconformal mappings at point // Trans. Amer. Math. Soc. – 1965. – **117**. – P. 335–351.
- [143] *Reimann H.M., Rychener T.* Funktionen Beschränkter Mittlerer Oscillation. – Lecture Notes in Math., **487**, 1975.
- [144] *Rickman S.* Quasiregular Mappings. – Springer, Berlin etc., 1993. – 213 p.
- [145] *Ryazanov V.* Some Questions of Convergence and Compactness for Quasiconformal Mappings // Amer. Math. Soc. Transl. – 1986. – **131**, (2). – P. 7–19.
- [146] *Ryazanov V., Salimov R.R., Sevost'yanov E.* Convergence and compactness of the Sobolev mappings // www.arxiv.org, arXiv:1208.1687v3 [math.CV] 16 Sep 2012, 47 pp.
- [147] *Ryazanov V., Sevost'yanov E.* Equicontinuity of mappings quasiconformal in the mean // arXiv: 1003.1199v3 [math.CV] 28 Sep 2010. – P. 1–16.
- [148] *Ryazanov V., Sevostyanov E.* Equicontinuity of mappings quasiconformal in the mean // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2011. – **36**. – P. 231–244.
- [149] *Ryazanov V., Sevost'yanov E.* On convergence and compactness of space homeomorphisms // www.arxiv.org, arXiv:1207.1231v5 [math.CV] 20 Aug 2012, 23 pp.
- [150] *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On ring solutions of Beltrami equation // J. Anal. Math. – 2005. – **96**. – P. 117–150.

- [151] *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation and ring homeomorphisms // Ukr. Math. Bull.– 2007. – **4**, 1. – P. 79–115.
- [152] *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On convergence theory for Beltrami equations // Укр. матем. вісник. – 2008. – **5**, № 4. – С. 524–535.
- [153] *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On convergence theory for Beltrami equations // Ukr. Math. Bull. – 2008. – **5**, no. 4. – P. 524–535.
- [154] *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* To strong ring solutions of the Beltrami equations // Uzbek. Math. J. – 2009. – No 1. – P. 127–137.
- [155] *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Integral conditions in the mapping theory // Укр. мат. вісник. – 2010. – **7**, № 1. – С. 73–87; transl. in Math. Sci. J. – 2011. – **173**, No. 4. – P. 397–407.
- [156] *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On strong solutions of the Beltrami equations // Comp. Var. Ell. Equ.– 2010. – **55**, 1–3. – P. 219–236.
- [157] *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On strong solutions of the Beltrami equations // Complex Var. Elliptic Equ. – 2010. – **55**, no 12. – P. 1099 – 1116.
- [158] *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Integral conditions in the theory of the Beltrami equations // Complex Variables and Elliptic Equations – 2011. – DOI: 10.1080/17476933.2010.534790.
- [159] *Salimov R.* On regular homeomorphisms in the plane // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2010. – **35**. – P. 285–289.
- [160] *Sarason D.* Functions of vanishing mean oscillation // Trans. Amer. Math. Soc. – 1975. – **207**. – P. 391–405.
- [161] *Sard A.* The measure of the critical values of differentiable maps // Bull. Amer. Math. Soc. – 1942. – **48**. – P. 883–890.
- [162] *Sard A.* The equivalence of  $n$ -measure and Lebesgue measure in  $E_n$  // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – **49**. – P. 758–759.
- [163] *Sard A.* Images of critical sets // Ann. Math. – 1958. – **68**, no. 2. – P. 247–259.

- [164] *Sard A.* Hausdorff measure of critical images on Banach manifolds // Amer. J. Math. – 1965. – **87**. – P. 158–174.
- [165] *Schiffer M., Schober G.* Representation of fundamental solutions for generalized Cauchy–Riemann equations by quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. 1. – 1976. – **2**. – P. 501–531.
- [166] *Schiffer M., Schober G.* A variational method for general families of quasiconformal mappings // J. Analyse Math. – 1978. – **34**. – P. 240–264.
- [167] *Schlesinger E.* Conformal Invariants and Prime Ends // Amer. J. Math. – 1958. – **80**. – P. 83–102.
- [168] *Shlyk V. A.* On the equality between  $p$ -capacity and  $p$ -modulus // Sibirsk. Mat. Zh. – 1993. – **34**, no. 6. – 216–221.
- [169] *Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation. Handbook in Complex Analysis: Geometric function theory. – **2**, 555–597, Elsevier B.V., 2005.
- [170] *Stein E.M.* Editor’s note: The differentiability of functions in  $\mathbb{R}^n$  // Ann. Math. – 1981. – **113**. – P. 383–385.
- [171] *Stepanoff W.* Sur la résolution du problème de Dirichlet á l’aide de l’intégrale de Poisson // Matem. сб. – 1924. – **32**, № 1. – С. 111–114.
- [172] *Stepanoff W.* Sur les conditions de l’existence de la différentielle totale // Mat. Sb. – 1925. – **32**. – P. 511–526.
- [173] *Strebel K.* Ein Konvergenzatz für Folgen quasikonformer Abbildungen // Comment. Math. Helv. – **44**, № 4. – 1969. – P. 469–475.
- [174] *Suominen K.* Quasiconformal maps in manifolds // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1966. – Vol. 393. – P. 1–39.
- [175] *Teichmüller O.* Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung // Deutsche Math. – 1938. – **3**. – P. 621–678.
- [176] *Tuominen H.* Characterization of Orlicz-Sobolev space // Ark. Mat. – 2007. – **45**, no. 1. – P. 123–139.

- [177] *Tyson J. T.* Metric and geometric quasiconformality in Ahlfors regular Loewner spaces // *Conform. Geom. Dyn.* – 2001. – 5. – P. 21–73 (electronic).
- [178] *Ukhlov A., Vodop'yanov S.* Mappings associated with weighted Sobolev Spaces // *Complex Anal. Dynam. Sys. III. Contemp. Math.* – 2008. – **455**. – P. 363–382.
- [179] *Väisälä J.* On quasiconformal mappings in space // *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math.* – 1961. – **298**. – P. 1–36.
- [180] *Väisälä J.* On quasiconformal mappings of a ball // *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math.* – 1961. – **304**. – P. 1–17.
- [181] *Väisälä J.* On the null-sets for extremal distances // *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math.* – 1961. – **322**. – P. 1–12.
- [182] *Väisälä J.* Two new characterizations for quasiconformality // *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math.* – 1965. – **362**. – P. 1–12.
- [183] *Väisälä J.* Lectures on  $n$ -dimensional quasiconformal mappings, *Lecture Notes in Math.*, **229**. – Springer–Verlag, Berlin, 1971. – 144 p.
- [184] *Vasil'ev A.* Moduli of families of curves for conformal and quasiconformal mappings, *Lecture Notes in Math.*, **1788**. – Springer–Verlag, Berlin–New York, 2002. – 211 p.
- [185] *Vuillermot P.A.* Hölder-regularity for the solutions of strongly nonlinear eigenvalue problems on Orlicz-Sobolev space // *Houston J. Math.* – 1987. – **13**. – P. 281–287.
- [186] *Vuorinen M.* Conformal Geometry and Quasiregular Mappings, *Lecture Notes in Math.* 1319. – Berlin: Springer–Verlag, 1988. – 209 p.
- [187] *Wilder R.L.* Topology of Manifolds. – AMS, New York, 1949. – 409 p.
- [188] *Whitney H.* A function not constant on a connected set of critical points // *Duke Math. J.* – 1935. – **1**. – P. 514–517.
- [189] *Zierner W.P.* Extremal length and conformal capacity // *Trans. Amer. Math. Soc.* – 1967. – **126**, no. 3. – P. 460–473.
- [190] *Альфорт Л.*, Лекции по квазиконформным отображениям, Москва: Мир, 1969.

- [191] *Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Intern. Journ. Math. and Math. Scie. – 2003. – **22**. – P. 1397-1420.
- [192] *Federer H.* Geometric Measure Theory, Springer, Berlin etc., 1969.
- [193] *Gehring F.W.* Lipschitz mappings and the  $p$ -capacity of ring in  $n$ -space // Advances in the theory of Riemann surfaces (Proc. Conf. Stonybrook, N.Y., 1969), Ann. of Math. Studies. – 1971. – **66**. – P. 175–193.
- [194] *Gehring F.W.* Quasiconformal mappings in Complex Analysis and its Applications, V. 2, International Atomic Energy Agency, Vienna, 1976.
- [195] *Gehring F.W.* Rings and quasiconformal mappings in space, Trans. Amer. Math. Soc., 103 (1962), p. 353-393.
- [196] *Golberg A.* Integrally quasiconformal mappings in space // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. Т.7, N2, 2010, с. 53-64
- [197] *Golberg A.* Differential properties of  $(\alpha, Q)$ -homeomorphisms // Further Progress in Analysis, World Scientific Publ. – 2009. – P. 218-228.
- [198] *Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения, М. Наука, 1983, 284 с.
- [199] *Gutlyanskii V.Ya., Golberg A.* On Lipschitz continuity of quasiconformal mappings in space, J. Anal. Math., 109, N. 1, 2009, p. 233-251.
- [200] *Gutlyanski V., Martio O., Sugava T. and Vuorinen M.* On the degenerate Beltrami equation, Trans. Amer. Math. Soc. V. 357, no. 3. (2005), p. 875-900.
- [201] *Hesse J.* A  $p$ -extremal length and  $p$ -capacity equality // Arc. Mat. – 1975. – **13**. – P. 131-144.
- [202] *Kovtonyuk D., Ryazanov V., Salimov R., Sevost'yanov E.* On mappings in the Orlicz-Sobolev classes // arXiv:1012.5010
- [203] *Lehto O. and Virtanen K.* "Quasiconformal Mappings in the Plane", Springer, New York etc., 1973.

- [204] *Martio O., Rickman S., Vaisala J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1969. – **448**. – P. 1-40.
- [205] *Кругликов В.И.* Ёмкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Матем. сб. – 1986. – **130**, № 2. – С. 185-206.
- [206] *Лаврентьев М.А.* Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. – М., 1962, 136 стр.
- [207] *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. Springer Monographs in Mathematics: – New York: Springer, 2009, 367 p.
- [208] *Мазья В.Г.* Классы областей, мер и емкостей в теории пространств дифференцируемых функций, Анализ – 3, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, 26, ВИНТИ, М., 1988, 159–228
- [209] *Ransford T.* Potential Theory in the Complex Plane. – Cambridge University Press, 1995.
- [210] *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On ring solutions of Beltrami equations, J. d'Anal. Math., 96 (2005), p. 117-150.
- [211] *Рязанов В.И., Севостьянов Е.А.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых  $Q$ -гомеоморфизмов // Сиб. матем. ж. - 2007. - Т. 48, № 6, с. 1361-1376.
- [212] *Сакс С.* Теория интеграла, – М., ИЛ, 1949.
- [213] *Севостьянов Е.А.* Об интегральной характеристике некоторых обобщений квазирегулярных отображений и значении условия расходимости интеграла в геометрической теории функций // Укр. матем. ж. – Т. 61, № 10. – 2009. – С. 1367–1380.
- [214] *Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А.* Теория кольцевых  $Q$ -отображений в геометрической теории функций // Матем. сборник. – Т. 201, № 6. – 2010. – С. 131–158.
- [215] *Салимов Р.Р.* Локальное поведение обобщенных квазиизометрий // Допов. Доповиди НАНУ. – 2011. – № 6. – С. 23 – 28.
- [216] *Shlyk V.A.* On the equality between  $p$ -capacity and  $p$ -modulus // Sibirsk. Mat. Zh. – 1993. – **34**, no. 6. – 216-221.



- [217] *Väisälä J.* Lectures on  $n$ -Dimensional Quasiconformal Mappings, Lecture Notes in Math., **229**. – Berlin etc., Springer–Verlag, 1971, 229 p.
- [218] *E. Reich and H. Walczak* On the behavior of quasiconformal mappings at point, Trans. Amer. Math. Soc, 117 (1965), pp. 335-351.
- [219] *O. Teichmüller*, Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung, Deutsche Math. 3 (1938), 621–678.
- [220] *V. Gutlyanski.. and M. Vuorinen*, On maps almost conformal at the boundary, Complex Var. Theory Appl. 34 (1997), 445.464.
- [221] *V. Gutlyanski.. and T. Sugawa*, On Lipschitz continuity of quasiconformal mappings, Rep. Univ. JuvŕNaskylŕNa 83 (2001), 91.108.
- [222] *O. LEHTO*, On the differentiability of quasiconformal mappings with prescribe complex dilatation, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1 Math. 275 (1960), pp. 1-28.

#### КОНТАКТНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

**Салимов Руслан Радикович**

Институт прикладной математики и механики НАН Украины  
 83 114 Украина, г. Донецк, ул. Розы Люксембург, д. 74,  
 отдел теории функций, раб. тел. (380) – 62 – 311 01 45,  
 e-mail: brusin2006@rambler.ru; ruslan623@yandex.ru